

แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

หน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

เรื่อง สมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม (2)

เวลา 1 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
2. แก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระสำคัญ

ให้ a, M และ N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^k = k \log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$ เมื่อ $k \neq 0$
7. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$

สมบัติเหล่านี้นำไปใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันลอการิทึมของจำนวนที่กำหนดให้ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถบอกสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมได้
2. นักเรียนสามารถนำสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าของจำนวนใด ๆ

สาระการเรียนรู้

ให้ a, M และ N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$

สมบัติเหล่านี้นำไปใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันลอการิทึมของจำนวนที่กำหนดให้ได้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1) \log_4(\log_3(\log_2 512)) &= \log_4(\log_3(\log_2 2^9)) \\ &= \log_4(\log_3 9) \\ &= \log_4(\log_3 3^2) \\ &= \log_4 2 \\ &= \log_{2^2} 2 \\ &= \frac{1}{2} \\ 2) (\log_6 36)(\log_{25} \frac{1}{5}) &= (\log_6 6^2)(\log_{5^2} 5^{-1}) \\ &= (2\log_6 6)(-\frac{1}{2}\log_5 5) \\ &= (2)(-\frac{1}{2}) \\ &= -1 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 3) \log_{10} 25 + \log_{10} 2 - \log_{10} 5 &= \log_{10} (25 \times 2) - \log_{10} 5 \\ &= \log_{10} 50 - \log_{10} 5 \\ &= \log_{10} \frac{50}{5} \\ &= \log_{10} 10 \\ &= 1 \\ 4) \log_{10} 15 + \log_{10} 12 + \log_{10} 5 - \log_{10} 9 &= \log_{10} \frac{15 \times 12 \times 5}{9} \\ &= \log_{10} 100 \\ &= \log_{10} 10^2 \\ &= 2 \\ 5) \log_4 2 + \log_4 32 + \log_2 80 - \log_2 5 &= \log_4 (2 \times 32) + \log_2 \frac{80}{5} \\ &= \log_4 64 + \log_2 16 \\ &= \log_4 4^3 + \log_2 2^4 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7 \end{aligned}$$

กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูทบทวนสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม โดยใช้ตัวอย่างที่ 1 ข้อที่ 1) - 2) และการถามตอบประกอบการอธิบาย
2. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 2 – 3 คน โดยละความสามารถ ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบกิจกรรมที่ 12 โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อหาค่าของแต่ละข้อแล้วบันทึกค่าที่ได้ลงในตารางใบกิจกรรมที่ 12 สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม (ขั้นการสำรวจ)
3. ครูให้นักเรียนสังเกตผลลัพธ์จากใบกิจกรรมที่ 12 ในแต่ละข้อว่า มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ครูใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย เพื่อให้นักเรียนสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ ดังนี้ (ขั้นการหาความสัมพันธ์)

ให้ a, M และ N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$

4. ครูและนักเรียนร่วมกันพิสูจน์ข้อสรุปนั้น เพื่อแสดงให้นักเรียนได้เห็นว่าข้อสรุปหรือสมบัติของลอการิทึม ดังกล่าวเป็นจริงตามหลักการทางคณิตศาสตร์ ดังนี้ (ขั้นการสรุปความสัมพันธ์)

ข้อที่ 1 $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

พิสูจน์	ให้	$x = \log_a M$	และ	$y = \log_a N$
	จะได้	$a^x = M$	และ	$a^y = N$
	ดังนั้น	MN	=	$a^x a^y = a^{x+y}$
		$\log_a MN$	=	$x + y$
	นั่นคือ	$\log_a MN$	=	$\log_a M + \log_a N$

(สมบัติข้ออื่นๆ ให้นักเรียนลองทำการพิสูจน์เอง)

5. ครูยกตัวอย่างโจทย์ ใช้การถามตอบประกอบการอธิบายแนวคิดของโจทย์ปัญหาและการหาคำตอบของโจทย์ ดังตัวอย่างที่ 2 ข้อที่ 3) – 5) (ขั้นการฝึกทักษะ)
6. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 2-3 คน จากนั้นให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 12 โจทย์เพิ่มเติมเมื่อนักเรียนทำเสร็จเรียบร้อยแล้ว ครูสุ่มให้นักเรียนออกมาเฉลยบนกระดาน และให้นักเรียนกลุ่มที่เหลือใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง จากนั้นครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง
7. ครูให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz หาค่าของลอการิทึมในแต่ละข้อต่อไปนี้ (ขั้นการแสดงผลบนทัศนที่คลาดเคลื่อน)

$$1) \log_2 10 - \log_2 5 =$$

$$\log_2(10) - \log_2(5)$$

1

$$2) \log_2(10 - 5) = \log_2 5 =$$

$$\log_2(5)$$

2.321928095

จากนั้นครูให้นักเรียนสังเกตคำตอบในข้อ 1) และ 2) ว่าเท่ากันหรือไม่ (ไม่เท่ากัน)

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปให้ได้ว่า $\log_a M - \log_a N \neq \log_a(M - N)$

$$3) \log_5 10 + \log_5 10 =$$

$$\log_5(10) + \log_5(10)$$

2.861353116

$$4) \log_5(10 + 10) = \log_5 20 =$$

$$\log_5(20)$$

1.861353116

จากนั้นครูให้นักเรียนสังเกตคำตอบในข้อ 3) และ 4) ว่าเท่ากันหรือไม่ (ไม่เท่ากัน)

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปให้ได้ว่า $\log_a M + \log_a N \neq \log_a(M + N)$

8. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุป สมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม ดังนี้

ให้ a, M และ N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$1. \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$2. \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$3. \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \text{ เมื่อ } b > 0 \text{ และ } b \neq 1$$

สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 12 สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม
2. แบบฝึกทักษะที่ 12
3. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz

การวัดและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 12
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 12
3. ประเมินจากการตอบคำถามในชั้นเรียน

ใบกิจกรรมที่ 12

สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz ในการหาคำตอบลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

ตารางที่ 1

สมบัติที่สำคัญของลอการิทึม	
1.1 $\log_2(16 \times 4) = \dots\dots\dots$	1.2 $\log_2 16 + \log_2 4 = \dots\dots\dots$
1.3 $\log_{10}(25 \times 4) = \dots\dots\dots$	1.4 $\log_{10} 25 + \log_{10} 4 = \dots\dots\dots$
1.5 $\log_3(3 \times 27) = \dots\dots\dots$	1.6 $\log_3 3 + \log_3 27 = \dots\dots\dots$
1.7 $\log_4(7 \times 5) = \dots\dots\dots$	1.8 $\log_4 7 + \log_4 5 = \dots\dots\dots$
1.9 $\log_{12}(\sqrt{3} \times \sqrt{5}) = \dots\dots\dots$	1.10 $\log_{12}\sqrt{3} + \log_{12}\sqrt{5} = \dots\dots\dots$
ดังนั้น $\log_a(MN) = \dots\dots\dots$	

ตารางที่ 2

สมบัติที่สำคัญของลอการิทึม	
2.1 $\log_5 \frac{50}{2} = \dots\dots\dots$	2.2 $\log_5 50 - \log_5 2 = \dots\dots\dots$
2.3 $\log_2 \frac{128}{4} = \dots\dots\dots$	2.4 $\log_2 128 - \log_2 4 = \dots\dots\dots$
2.5 $\log_7 \frac{8}{15} = \dots\dots\dots$	2.6 $\log_7 8 - \log_7 15 = \dots\dots\dots$
2.7 $\log_2 \frac{45}{5} = \dots\dots\dots$	2.8 $\log_2 45 - \log_2 5 = \dots\dots\dots$
2.9 $\log_3 \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}} = \dots\dots\dots$	2.10 $\log_3 \sqrt{27} - \log_3 \sqrt{8} = \dots\dots\dots$
ดังนั้น $\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \dots\dots\dots$	

ตารางที่ 3

สมบัติที่สำคัญของลอการิทึม	
3.1 $\log_6 36 = \dots\dots\dots$	3.2 $\frac{1}{\log_{36} 6} = \dots\dots\dots$
3.3 $\log_9 2 = \dots\dots\dots$	3.4 $\frac{1}{\log_2 9} = \dots\dots\dots$
3.5 $\log_4 3.5 = \dots\dots\dots$	3.6 $\frac{1}{\log_{3.5} 4} = \dots\dots\dots$
3.7 $\log_{16} \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$	3.8 $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} 16} = \dots\dots\dots$
3.9 $\log_2 \sqrt{8} = \dots\dots\dots$	3.10 $\frac{1}{\log_{\sqrt{8}} 2} = \dots\dots\dots$
ดังนั้น. $\log_b a = \dots\dots\dots$	

แบบฝึกทักษะที่ 12

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงการคำนวณหาค่าต่อไปนี้ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

1) $\log_4(\log_3 81) =$

2) $\log_4(\log_2(\log_5 625)) =$

3) $2\log_8 7 - \log_8 21 + \log_8 6 - \log_8 14 =$

4) $\log_{10} 300 + \log_{10} 6 - \log_{10} 18 =$

5) $\log_6 3 + \log_6 24 - \log_6 2 =$

6) $\log_{10} \left(\frac{16}{5}\right) + \log_{10} \left(\frac{45}{12}\right) - \log_{10} \left(\frac{3}{25}\right) =$

7) $(\log_3 9)(\log_4 16) - \log_{10} 8 + 3\log_{10} 20 =$